Άσκηση: Αποδείξτε ότι η καμπύλη $c(t) = (t, t^2, 2t^2 - t + 1)$ $t \in \mathbb{R}$ είναι επίπεδη και να βρεθεί το επίπεδό της

ΛΥΣΗ

Η c λεία με $c'(t) = (1, 2t, 4t-1) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ c κανονική.

$c''(t) = (0, 2, 4)$

$$K(t) = \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3} > 0$$

$$\tau(t) = \frac{(c'(t), c''(t), c'''(t))}{\|c' \times c''\|^2} \xrightarrow{c'''=0} \tau = 0 \text{ και } k > 0 \Rightarrow c \text{ επίπεδη}$$

$$\vec{b}(t) = \frac{c'(t) \times c''(t)}{\|c'(t) \times c''(t)\|} \perp c(t)$$

Το επίπεδο του c είναι το επίπεδο που διέρχεται από το $c(0) = (0,0,1)$ και είναι $\parallel \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ άρα:

$b_1(x-0) + b_2(y-0) + b_3(z-0) = 0$

β' τρόπος

Έστω επίπεδο της (c) με εξίσωση: $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$

τότε $At + Bt^2 + \Gamma(2t^2 - t + 1) + \Delta = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$(B + 2\Gamma)t^2 + (A - \Gamma)t + \Gamma + \Delta = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$B + 2\Gamma = 0$ και $A - \Gamma = 0$ και $\Gamma + \Delta = 0$

$A = \Gamma$ και $\Delta = -\Gamma$ $\Big\} \Rightarrow \Gamma \neq 0$

$\Gamma x - 2\Gamma y + \Gamma z - \Gamma = 0 \Rightarrow x - 2y + z - 1 = 0$

Άσκηση: Δίνεται η καμπύλη $c(t) = (\alpha\cos t, \alpha\sin t, f(t))$ $t\in\mathbb{R}$ και $a>0$ ενώ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ λεία συνάρτηση. Να βρεθεί η f ώστε η c να είναι επίπεδη.

ΛΥΣΗ

Η c είναι λεία με διάνυσμα ταχύτητας

$c'(t) = (-\alpha\sin t, \alpha\cos t, f'(t)) \neq (0,0,0)$ $\forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Η c κανονική

$c''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, f''(t))$

$$c'(t)\times c''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a\sin t & \alpha\cos t & f'(t) \\ -a\cos t & -a\sin t & f''(t) \end{vmatrix} = (\ldots, \ldots, a^2) \neq 0$$

$$\Rightarrow k(t) = \frac{\|c'(t)\times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3} > 0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

Η c επίπεδη $\Leftrightarrow \tau(t)=0 \Leftrightarrow \dfrac{(c'(t), c''(t), c'''(t))}{\|c'(t)\times c''(t)\|} = 0$

$c'''(t) = (\alpha\sin t, -\alpha\cos t, f'''(t))$

$$0 = (c'(t), c''(t), c'''(t)) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\alpha\sin t & \alpha\cos t & f'(t) \\ -a\cos t & -a\sin t & f''(t) \\ \alpha\sin t & -a\cos t & f'''(t) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & f'''(t)+f'(t) \\ -a\cos t & -a\sin t & f''(t) \\ a\sin t & -a\cos t & f'''(t) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow f''' + f' = 0 \overset{\text{Δ.Ε. Στ. Συντ.}}{\Longleftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow f(t) = c_1 + c_2\cos t + c_3\sin t$, $\forall t\in\mathbb{R}$

Άσκηση: Έστω $c(s)$ με φυσική παράμετρο και $k(s)>0$ παντού και το $\vec{n}(s)=(\sin s, 0, \cos s)$ $\forall s$. Να βρεθεί η $c(s)$.

Λύση

$$\dot{\vec{n}}(s) = (\cos s, 0, -\sin s)$$
$$\ddot{\vec{n}}(s) = (-\sin s, 0, -\cos s)$$
$$\ddot{\vec{n}} = -\vec{n} \quad (1)$$

$$\dot{\vec{n}} = -k\vec{t} + \tau\vec{b} \Rightarrow \ddot{\vec{n}} = -\dot{k}\vec{t} - k\dot{\vec{t}} + \dot{\tau}\vec{b} + \tau\dot{\vec{b}} =$$
$$= -\dot{k}\cdot\vec{t} - k^2\vec{n} + \dot{\tau}\vec{b} - \tau^2\vec{n} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ddot{\vec{n}} = -\dot{k}\vec{t} - (k^2+\tau^2)\vec{n} + \dot{\tau}\vec{b} \quad (2)$$

Από (1) και (2) λαμβάνουμε ισότητα

$$\begin{cases} -\dot{k} = 0 \Rightarrow k = \sigma\tau\alpha\theta \\ k^2+\tau^2 = 1 \\ \dot{\tau} = 0 \Rightarrow \tau = \sigma\tau\alpha\theta \end{cases} \rightarrow \text{Κυλινδρική έλικα}$$

$$\dot{\vec{t}} = k\vec{n} \Rightarrow \ddot{c}(s) = k(\sin s, 0, \cos s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^s \ddot{c}(\sigma)\,d\sigma = \int_0^s k(\sin\sigma, 0, \cos\sigma)\,d\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{c}(s) - \dot{c}(0) = k(1-\cos s, 0, \sin s) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dot{c}(s) = \dot{c}(0) + k(1-\cos s, 0, \sin s) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_0^s \dot{c}(\sigma)\,d\sigma = s\dot{c}(0) + k\left(s - \int_0^s \cos\sigma\,d\sigma, 0, \int_0^s \sin\sigma\,d\sigma\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c(s) = c(0) + k(s-\sin s, 0, 1-\cos s) + s\dot{c}(0)$$

Άσκηση: Δίνεται η καμπύλη $c(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$

ΝΔΟ η $c(t)$ καμπύλη με σταθερή κλίση

Λύση

$$c'(t) = (3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2) = 3(1 - t^2, 2t, 1 + t^2) \neq (0,0,0) \Rightarrow \text{κανονική}$$

$$c''(t) = (-6t, 6, 6t) = 3(-2t, 2, 2t) = 6(-t, 1, t)$$

$$c'''(t) = 6(-1, 0, 1)$$

$$c'(t) \times c''(t) = 18 \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1-t^2 & 2t & 1+t^2 \\ -t & 1 & t \end{vmatrix} = 18(t^2 - 1, -2t, 1 + t^2) \neq (0,0,0)$$

Έτσι,

$$k(t) = \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3} = \frac{1}{3(1+t^2)}$$

$$(c'(t), c''(t), c'''(t)) = 216$$

Έτσι,

$$\tau(t) = \frac{(c', c'', c''')}{\|c' \times c''\|^2} = \frac{1}{3(1+t^2)^2}$$

$$\frac{\tau}{k} = 1 = \text{σταθ.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow c$ σταθ. κλίσης

και μάλιστα $\frac{\tau}{k} = \cot\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$ rad

Η διεύθυνση της (C) είναι το μοναδιαίο διάνυσμα

$$w = \cos\frac{\pi}{4}\vec{t} + \sin\frac{\pi}{4}\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{t} + \vec{b}), \quad \vec{t} = \frac{c'}{\|c'\|}, \quad \vec{b} = \frac{c' \times c''}{\|c' \times c''\|}$$

άρα $w = (0, 0, 1)$

Επαλήθευση: $\cos(\widehat{c'(t), w}) = \dfrac{\langle c'(t), w \rangle}{\|c'(t)\| \cdot \|w\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Άσκηση: ΝΔΟ οι καμπύλες:

$c(t) = (t+\sqrt{3}\sin t,\ 2\cos t,\ \sqrt{3}t - \sin t)$

$\tilde{c}(t) = (2\cos t,\ 2\sin t,\ -2t)$

Είναι γεωμετρικά ισότιμες

ΛΥΣΗ

ΘΔΟ $\exists T \in Isom(\mathbb{R}^3) : \tilde{c} = T \circ c$

όπου στον $\mathbb{R}^3$ $T = T_v \circ A$

$\tilde{c}'(t) = (-2\sin t,\ 2\cos t,\ -2) = 2(-\sin t, \cos t, -1)$, $\|\tilde{c}'(t)\| = 2\sqrt{2}$

και $\|c'(t)\| = 2\sqrt{2}$

$s = \int_0^t \|c'(u)\|du = 2\sqrt{2}t$, $\tilde{s} = \int_0^s \|\tilde{c}'(u)\|du \Rightarrow \tilde{s} = 2\sqrt{2}t$

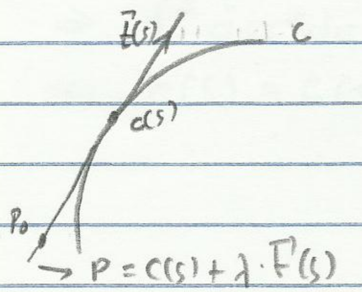
Άρα, $s(t) = \tilde{s}(t)$ άρα εφαρμόζεται το θεμελιώδες θεώρημα (Θ.Θ) και βρίσκουμε $\kappa = \tilde{\kappa} = \frac{1}{4}$ και $\tau = \tilde{\tau} = -\frac{1}{4}$

Και άρα από Θ.Θ είναι γεωμετρικά ισότιμες

Άσκηση: Αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες κανονικής καμπύλης (c) του $\mathbb{R}^3$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε η (c) είναι ευθεία (ή ευθύγραμμο τμήμα)

ΛΥΣΗ

Έστω c έχει παράμετρο το s με την ιδιότητα ότι όλες οι ευθείες (εφαπτόμενες) περνούν όλες από το ίδιο σημείο. Έτσι, $\vec{T}(s) = \dot{c}(s)$.



Άρα, $\forall s$, $\exists \lambda = \lambda(s)$ ώστε

(*) $P_0 = c(s) + \lambda(s)\vec{T}(s)$ σημείο κοινό όλων των εφαπτομένων.

Πολλ/ζω την (*) εσωτερικά με $\vec{T}(s)$

$\langle P_0, \vec{T}(s)\rangle = \langle c(s), \vec{T}(s)\rangle + \lambda(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda(s) = \langle P_0, \vec{T}(s)\rangle - \langle c(s), \vec{T}(s)\rangle$

Παραγωγίζουμε την (*)

$0 = \dot{c}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{T}(s) + \lambda(s)\dot{\vec{T}}(s) \Rightarrow$

Έστω ότι $\exists s_0$ $k(s_0)>0 \overset{\text{κον.}}{\Rightarrow} k(s)>0 \ \ \forall s\in(s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon)=I_0$

$\Leftrightarrow \ 0=(1+\mathring{\lambda}(s))\vec{t}(s)+\lambda(s)k(s)\vec{n}'(s) \Rightarrow$

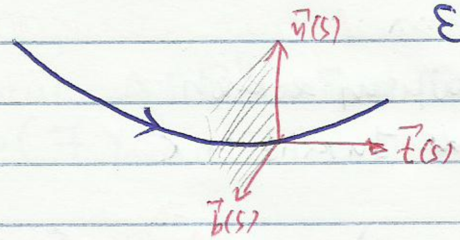
$\Rightarrow \ 1+\mathring{\lambda}(s)=0$ και $\lambda(s)k(s)=0$

Έτσι στο I_0 έχω $\lambda(s)=0 \Rightarrow \mathring{\lambda}(s)=0$ Άτοπο

(διότι $1+\mathring{\lambda}(s)=0 \Rightarrow 1=0$)

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Έστω $c: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ καμπύλη φυσικής παραμέτρου και $k(s)>0$ για κάθε $s\in I$. Το επίπεδο που ορίζεται από τα $\vec{b},\vec{n}$ είναι κάθετο στην καμπύλη c με μορφή $P=c(s)+\lambda\vec{n}(s)+\mu\vec{b}(s),\ \forall s\in I$



Άσκηση

Αν όλα τα κάθετα επίπεδα κανονικής καμπύλης c του $\mathbb{R}^3$ με καμπυλότητα παντού θετική διέρχεται από το ίδιο σημείο P_0 τότε η καμπύλη c είναι σφαιρική

ΛΥΣΗ

Έστω c με παράμετρο το μήκος τόξου s και P_0 το κοινό σημείο των κάθετων επιπέδων. Δηλαδή $\exists \lambda=\lambda(s), \mu=\mu(s)$ ώστε $P_0=c(s)+\lambda(s)\vec{n}(s)+\mu(s)\vec{b}(s),\ \forall s\in I$ (*)

Προτού παραγωγίσω πρέπει νδο $\lambda(s)$ & $\mu(s)$ παραγωγίσιμα πολλ/ζω με $\vec{n}(s)$ εσωτερικά και $\vec{b}(s)$ για την εύρεση των $\lambda(s)$ και $\mu(s)$. Έπειτα μπορώ να διαφορίσω την (*)

$$0=\mathring{c}+\mathring{\lambda}\vec{n}+\lambda\mathring{\vec{n}}+\mathring{\mu}\cdot\vec{b}+\mu\cdot\mathring{\vec{b}} \xrightarrow[\text{Frenet}]{k(s)>0}$$

$$\Rightarrow 0=\vec{t}+\mathring{\lambda}\vec{n}+\lambda(-k\vec{t}+\tau\vec{b})+\mathring{\mu}\vec{b}-\mu\tau\vec{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0=(1-\lambda k)\vec{t}+(\mathring{\lambda}-\mu\tau)^{n}+(\mathring{\mu}+\lambda\tau)^{b}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-\lambda(s)\cdot k(s)=0 & (1) \\ \dot{\lambda}(s)-\mu(s)\,\tau(s)=0 & (2) \quad \forall s. \\ \dot{\mu}(s)+\lambda(s)\,\tau(s)=0 & (3) \end{cases}$$

Έτσι, $c(s)-p_0 = -\lambda(s)\vec{n}(s)-\mu(s)\vec{b}(s) \Rightarrow \|c(s)-p_0\| = \sqrt{\lambda^2(s)+\mu^2(s)}$

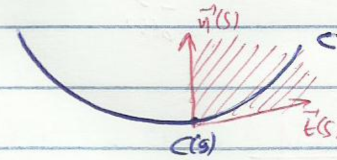
Ελέγχω:

$$(\lambda^2+\mu^2)^{\circ} = 2(\lambda\dot{\lambda}+\mu\dot{\mu}) \underset{(2)}{\overset{(1)}{=\!=}} 2(\lambda\mu\tau-\mu\lambda\tau)=0$$

Άρα,

$$\lambda^2+\mu^2=\sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \|c(s)-p_0\|=\sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \text{η } c \text{ σφαιρική}$$

Άσκηση: Ίδια εκφώνηση με την προηγούμενη άσκηση αλλά έχουμε επίπεδα προσκολλήσεως και ζητάμε η c να είναι επίπεδη.



Λύση

Όμοια λύση με προηγουμένως

άλλως

$$p_0 = c(s)+\lambda(s)\vec{t}(s)+\mu(s)\vec{n}(s), \quad \forall s\in I \quad (*)$$

Ελέγχουμε τις $\lambda(s)$, $\mu(s)$ λείες

και παραγωγίζουμε τη σχέση $(*)$

$$0 = \dot{c}+\dot{\lambda}\vec{t}+\lambda\dot{\vec{t}}+\dot{\mu}\vec{n}+\mu\dot{\vec{n}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = \vec{t}+\dot{\lambda}\vec{t}+\lambda\cdot k\vec{n}+\dot{\mu}\vec{n}+\mu\dot{\vec{n}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = (1+\dot{\lambda}-\mu k)\vec{t}+(\dot{\mu}+\lambda k)\vec{n}+\mu\tau\vec{b}$$

$$\overset{\text{γραμ. ανεξ.}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 1+\dot{\lambda}-\mu k=0 & (1) \\ \dot{\mu}+\lambda k=0 & (2) \quad \forall s \\ \mu(s)\cdot\tau(s)=0 & (3) \end{cases}$$

Έστω ότι $\exists\, s_0\in I$ ώστε $\tau(s_0)\neq 0$

Έτσι λόγω συνέχειας $\exists\,\varepsilon>0$ ώστε

$\tau(s)\neq 0$, $\forall s\in(s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon)=I_0$

Τότε από (3) έχουμε ότι $\mu(s)=0$ $\forall s\in I_0 \Rightarrow \dot{\mu}(s)=0$, $\forall s\in I_0$

Τότε $(2) \Rightarrow \lambda(s)k(s)=0$ $\forall s\in I_0 \underset{k(s)>0}{\Rightarrow} \lambda(s)=0$ $\forall s\in I_0$

Άτοπο λόγω ότι δεν ικανοποιείται η (1) $\Rightarrow \tau(s)=0$ $\forall s\in I \Rightarrow$ επίπεδη

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

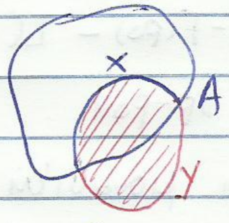
Συνεχείς απεικονίσεις:

Ορισμός: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ απεικόνιση. Το U ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$
Η f καλείται συνεχής στο $p_0 \in U \Leftrightarrow (\forall B_\varepsilon(f(p_0)))(\exists B_\delta(p_0) \subset U)$ ώστε $f(B_\delta(p_0)) \subset B_\varepsilon(f(p_0))$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Η συνεχής απεικόνιση αντιστρέφει ανοικτά σε ανοιχτά σύνολο.

Επαγόμενη τοπολογία:

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ένα $X \subseteq A$ καλείται ανοιχτό εν $A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\exists\, Y_{\text{ανοιχτό}} \subseteq \mathbb{R}^n)$ ώστε $X = A \cap Y$



ΟΡΙΣΜΟΣ: Η $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ καλείται συνεχής στο $p_0 \in A \Leftrightarrow \forall$ ανοιχτή περιοχή του $f(p_0) \subset \mathbb{R}^m$, $\exists$ ανοιχτή περιοχή V του p_0 στο A ώστε $f(V) \subseteq W$

Ορισμός (Συναρτήσεις Συντεταγμένων)

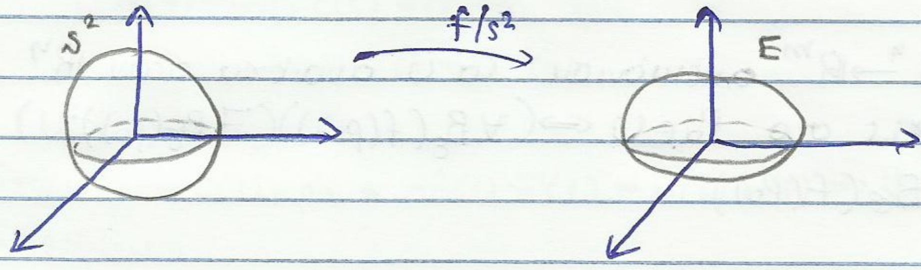
$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $p \in A$, $f(p) = (f_1(p), \dots, f_m(p))$ ή $f = (f_1, \dots, f_m)$
λέγονται συναρτήσεις συντεταγμένων με $f_1, \dots, f_m : A \to \mathbb{R}$

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΙΣΜΟΣ:

Ορισμός: Έστω $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^m$
Η f καλείται ομοιομορφισμός αν.ν
i) f συνεχής, 1-1 και επί
ii) $f^{-1}: B \to A$ συνεχής
το A καλείται ομοιομορφικό με το B

πχ
ο κύβος και η μπάλα είναι ομοιομορφικά.

πχ) $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2=1\}$, $E=\{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1\}$



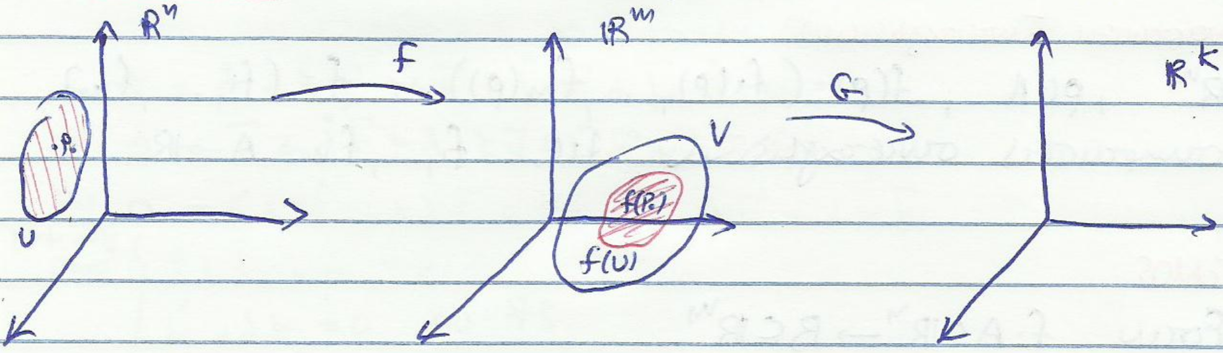
Διαφορίσιμες Απεικονίσεις μεταξύ Ευκλείδειων χώρων

Ορισμός: Έστω $f: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ U ανοιχτό του $\mathbb{R}^n$.
Η f καλείται διαφορίσιμη στο $p_0\in U$ αν.ν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ με την ιδιότητα

$$\lim_{p\to p_0}\frac{F(p)-F(p_0)-L(p-p_0)}{\|p-p_0\|}=0$$

Η L είναι μοναδική και καλείται διαφορικό της f στο p_0 και συμβολίζεται με df_p

Σύνθεση: $F: U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $G: V\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ διαφορίσιμη



με $F(U)\subseteq V$, $G\circ f: U\to\mathbb{R}^k$ διαφορίσιμη
και $d(G\circ f)=dG\cdot df$ (κανόνας Αλυσίδας)